2019

MATHEMATICS

(General)

(Abstract Algebra and Matrices)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

PART—I

(*Marks* : 7)

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Define order of an element of a group.

এটা সংঘৰ মৌল এটাৰ মৌলাংকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(b) Find the order of ω and ω^2 in the multiplicative group $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, where ω is a cube root of unity.

গুণাধীনৰ সংঘ $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ ত ω আৰু ω^2ৰ মৌলাংক নিৰ্ণয় কৰা, য'ত ω হ'ল ঘনকীয় একক মূল।

(c) Give an example of a cyclic group of order 4.
4 মৌলাংকৰ চক্ৰীয় সংঘ এটাৰ উদাহৰণ দিয়া।

(d) What is the identity element of the quotient group G/N?
ভাগফল সংঘ G/Nৰ একক মৌলটো কি?

(e) What is the rank of a null matrix?
ৰিক্ত মৌলকক্ষ এটাৰ কোটি কিমান?

(f) When is a square matrix A said to be invertible?
এটা বৰ্গীয় মৌলকক্ষ A-ক কেতিয়া প্ৰতিলোমনীয় বুলি কোৱা হয়?

(g) Find the cycles of the following permutation :
তলত দিয়া বিন্যাসটোৰ চক্ৰবোৰ নিৰ্ণয় কৰা :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

PART—II

(*Marks* : 8)

2. Answer the following questions : 2×4=8
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Show that $(\mathbb{N}, +)$ is not a group.
দেখুওৱা যে $(\mathbb{N}, +)$ এটা সংঘ নহয়।

(b) Define an isomorphism from a group to another group and give an example of it.
এটা সংঘৰ পৰা আন এটা সংঘলৈ সমৰূপতাৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু ইয়াৰ এটা উদাহৰণ দিয়া।

(c) Define right cosets and left cosets of a subgroup of a group.
এটা সংঘৰ উপসংঘৰ সোঁ আৰু বাওঁ সহসংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা।

(d) Define symmetric and skew-symmetric matrix.
সমমিত আৰু বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা লিখা।

PART—III

(*Marks* : 15)

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=15
তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Define a group. Prove that in a group G, identity element is unique and inverse of each $a \in G$ is unique. 1+2+2=5
সংঘৰ সংজ্ঞা লিখা। প্ৰমাণ কৰা যে সংঘ Gৰ নিৰপেক্ষ মৌল অদ্বিতীয় আৰু প্ৰতিটো মৌল $a \in G$ৰ প্ৰতিলোম অদ্বিতীয়।

(b) Prove that every cyclic group is Abelian. Is the converse true? Justify your answer. 3+1+1=5

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো চক্ৰীয় সংঘ এবেলীয়। ইয়াৰ বিপৰীতটো সত্যনেকি? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

(c) Define normal subgroup of a group. Show that intersection of two normal subgroups is again a normal subgroup. 2+3=5

সংঘৰ নিশ্চৰ উপসংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে দুটা নিশ্চৰ উপসংঘৰ ছেদনও এটা নিশ্চৰ উপসংঘ হ'ব।

(d) Prove that a square matrix can be uniquely expressed as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৰ্গ মৌলকক্ষক অদ্বিতীয়ভাৱে এটা সমমিত আৰু এটা বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

(e) For two matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, verify $(AB)' = B'A'$. 5

(Continued)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ আৰু $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ মৌলকক্ষ দুটাৰ বাবে সত্যাপন কৰা যে $(AB)' = B'A'$.

PART—IV

(*Marks* : 30)

Answer *either* *(a)* and *(b)* *or* *(c)* and *(d)* from each of the following questions : 10×3=30

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা *(a)* আৰু *(b)* *অথবা* *(c)* আৰু *(d)* ৰ উত্তৰ দিয়া :

4. (a) An operation '$*$' defined on the set $\mathbb{Z}$ of integers by $a*b = a+b+1$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Show that $(\mathbb{Z}, *)$ is an Abelian group. 5

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{Z}$ ত এটা প্ৰক্ৰিয়া '$*$' ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $a*b = a+b+1$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. দেখুওৱা যে $(\mathbb{Z}, *)$ এটা এবেলীয় সংঘ।

(b) State and prove Lagrange's theorem on order of a subgroup of a finite group. 1+4=5

এটা সসীম সংঘৰ উপসংঘৰ মৌলাংক সম্পৰ্কীয় লাগ্ৰাঞ্জৰ প্ৰমেয়টোৰ উক্তি আৰু প্ৰমাণ লিখা।

(c) Prove that in a ring R

(i) $(-a)(-b) = ab$, $\forall a, b \in R$

(ii) $a(b-c) = ab - ac$, $\forall a, b, c \in R$ 5

(Turn Over)

যি কোনো এটা বলয় Rৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $(-a)(-b) = ab, \forall a, b \in R$

(ii) $a(b-c) = ab - ac, \forall a, b, c \in R$

(d) Let $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Show that M forms a ring under matrix addition and multiplication. 5

ধৰা হ'ল $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$.

দেখুওৱা যে মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে M-এ এটা বলয় গঠন কৰে।

5. (a) Define quotient group. Prove that every quotient group of an Abelian group is Abelian. 2+3=5

ভাগফল সংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো এবেলীয় সংঘৰ ভাগফল সংঘ এটা এবেলীয় সংঘ।

(b) Let N be a normal subgroup of a group G. $f : G \to G/N$ is defined by $f(x) = xN$, $\forall x \in G$. Show that f is an onto homomorphism and also find the kernel of f. 4+1=5

ধৰা হ'ল N, সংঘ Gৰ নিশ্চৰ উপসংঘ। $f : G \to G/N$ ফলনটো সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে এনেদৰে : $f(x) = xN$, $\forall x \in G$. দেখুওৱা যে f এটা আচ্ছাদক সমৰূপতা আৰু লগতে Kernel of f নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Show that

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\} \subseteq \mathbb{C}$$

forms a commutative ring with unity under the operations of addition and multiplication of complex numbers. 5

দেখুওৱা যে

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\} \subseteq \mathbb{C}$$

যে জটিল সংখ্যাৰ যোগ আৰু পূৰণ সাপেক্ষে এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয় গঠন কৰে।

(d) Let R be a ring with unity such that $(xy)^2 = x^2y^2, \forall x, y \in R$. Show that R is a commutative ring. 5

ধৰা হ'ল R এটা এককসহ বলয় য'ত $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall x, y \in R$. দেখুওৱা যে R এটা ক্ৰমবিনিময় বলয়।

6. (a) If A and B are two n-square matrices, show that $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$. 5

A আৰু B দুটা n-বৰ্গীয় মৌলকক্ষ হ'লে, দেখুওৱা যে $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$.

(b) If A is an n-square matrix, then show that $|\operatorname{adj} A| = |A|^{n-1}$. 5

A এটা n-বৰ্গীয় মৌলকক্ষ। দেখুওৱা যে $|\operatorname{adj} A| = |A|^{n-1}$.

(c) Find the values of λ and μ for which the system of equations

$$x+y+z=6$$
$$x+2y+3z=10$$
$$x+2y+\lambda z=\mu$$

has—

(i) no solution;

(ii) unique solution;

(iii) infinite number of solutions. 5

λ আৰু μ ৰ মানবোৰ উলিওৱা যাতে তলত দিয়া সমীকৰণবোৰৰ—

$$x+y+z=6$$
$$x+2y+3z=10$$
$$x+2y+\lambda z=\mu$$

(i) কোনো সমাধান নাথাকে;

(ii) এক অদ্বিতীয় সমাধান থাকে;

(iii) অসীম সংখ্যক সমাধান থাকে।

(d) Solve by matrix method : 5

মৌলকক্ষ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা :

$$x+y+z=1$$
$$3x+4y+5z=2$$
$$2x+3y+4z=1$$

★★★